
Sistemas electorales basados en la representación proporcional

Victoriano Ramírez González y Adolfo López Carmona

Resumen: En este trabajo se describen, a grandes rasgos, los elementos básicos de un sistema electoral. Se hace hincapié fundamentalmente en los principales métodos de reparto proporcional, que se agrupan en dos familias: una, formada por los métodos de divisores y, otra, por los métodos de cuotas y restos. Para los métodos de divisores probamos la equivalencia de dos técnicas de reparto de escaños, la basada en la tabla de cocientes y la basada en redondeos de acuerdo con unas barreras fijas. Además, se describen los métodos de reparto proporcional con requisitos mínimos y máximos, y también la técnica de la biproporcionalidad. Como aplicación de todo ello se propone una alternativa al sistema electoral para el Congreso de los Diputados de España y, usando los datos de las elecciones generales de 2011, se simulan resultados con la propuesta realizada, comparándose con los resultados obtenidos con el sistema electoral actual.

Palabras clave: Sistema electoral; representatividad; gobernabilidad; biproporcionalidad.

Código JEL: C02; D63; D72.

1. Introducción¹

A la hora de definir un sistema electoral es necesario establecer qué tamaño va a tener el parlamento que se elige, qué circunscripciones se desean, qué barrera electoral se va a usar y con qué método se van a asignar los escaños a las circunscripciones y a los partidos políticos.

Cuando el número de circunscripciones electorales es igual al número de escaños del parlamento, en cada una se elige un escaño, el sistema electoral se conoce como mayoritario. Mientras que si la mayoría de las circunscripciones tienen asignados varios escaños, que deben asignarse a los partidos en proporción a sus votos, suele referirse a un sistema de representación proporcional. No obstante, esta división en sistemas mayoritarios y proporcionales es un poco vaga, porque pueden ser todas las circunscripciones de tamaño superior a la unidad, pero tamaños pequeños, y entonces los resultados de aplicar el correspondiente sistema electoral son muy parecidos a los de un sistema mayoritario. Por otra parte, también es posible diseñar un sistema electoral en el que la mayoría de los escaños del parlamento se elijan en distritos uninominales y con los restantes escaños se consigan repartos que sean altamente proporcionales, porque con esos escaños se compensen

1 Los autores desean agradecer a la Junta de Andalucía la ayuda recibida a través del Proyecto de Excelencia SEJ-8044 y del grupo de Investigación FQM-0191.

las desproporciones surgidas en los distritos uninominales. Así pues, cuando se contemplan todas las variables (barrera, tamaños de la circunscripciones, métodos de reparto), se tiene una variedad de sistemas electorales tan amplia que prácticamente es muy difícil encontrar dos países que tengan el mismo sistema electoral.

La representación proporcional significa que el número de escaños que se debe asignar a un partido será proporcional a sus votos, o el tamaño de una circunscripción debe ser proporcional a sus habitantes. Las proporciones obtenidas, en ambos casos, son fracciones que hay que redondear a cantidades enteras y ahí es donde entran en juego los diferentes métodos de reparto proporcional. Existe una infinidad de métodos posibles de reparto proporcional (Balinski y Young, 1982), si bien un número muy reducido de ellos (inferior a 10) son los que se usan en la práctica y podríamos limitar a 3 o 4 el número de métodos que son muy usados: d'Hondt, Hamilton (o restos mayores), Sainte-Laguë y Sainte-Laguë modificado. A esta lista podríamos añadir el método de Hill usado en EE.UU. para distribuir los 435 escaños del Parlamento entre los Estados que componen la Unión.

Para los repartos proporcionales que se llevan a cabo en España en las diferentes elecciones (Congreso de los Diputados, Parlamento Europeo, Elecciones Autonómicas, Elecciones Municipales, etc.) el método más usado es el d'Hondt, si bien

también se usa algo el de Hamilton, por ejemplo, para distribuir 248 de los 350 escaños del Congreso entre las 50 provincias. Estos dos métodos operan como se muestra en el cuadro 1, al aplicarlos a los votos de la circunscripción de Granada en las elecciones de 2011.

La tercera columna contiene las proporciones exactas de escaños (o cuotas) de los partidos con derecho a participar en la asignación de los 7 escaños. El reparto de Hamilton consiste en asignar a cada partido la parte entera de su cuota, en este caso son 3 escaños al PP y 2 al PSOE. Como quedan dos escaños por asignar se le otorgan a los dos partidos con mayor resto, uno al PSOE, que tiene 0,61 de resto y otro a IU, que tiene 0,57, con lo que se obtiene el reparto mostrado en la última columna en el cuadro 1.

Para el reparto con el método d'Hondt hay que calcular los cocientes que se obtienen al dividir los votos por 1, 2, 3, 4, 5, ..., (columnas 3ª a 6ª) y localizar las posiciones de los 7 cocientes más altos, los que aparecen en negrita. Como 4 de esos cocientes están en la fila del PP y 3 en la fila del PSOE, esos son los escaños que reciben ambos partidos (los restantes no reciben ningún escaño).

Más adelante incidiremos en detalle sobre estos dos métodos y también sobre el de Sainte-Lagué, ya que este conduce a repartos muy similares a los obtenidos con Hamilton, pero no da lugar a paradojas ni repartos inconsistentes, como ocurre con el método de Hamilton.

2. Elementos del Sistema Electoral

2.1. Definición de sistema electoral

Salvador Giner define sistema electoral como el «conjunto de actos, momentos y operaciones regladas a través de las cuales se consiguen formar, mediante emisión del voto, órganos representativos que expresan las preferencias políticas de los ciudadanos» (Giner et al. 1998). Esta definición implica desde el momento de la campaña electoral hasta el momento de la transformación de votos

en escaños aplicando un método concreto. Una primera clasificación de los sistemas electorales los agrupa en dos tipos:

- Mayoritario: reparte los escaños al partido o candidatura que obtiene la mayoría de los votos.
- Proporcional: reparte los escaños proporcionalmente, en función del porcentaje de votos de cada una de las candidaturas o partidos.

Según Salvador Giner, «al sistema mayoritario es común atribuirle la facultad de propiciar mayorías parlamentarias claras y consiguientemente gobiernos estables. A los sistemas proporcionales se les atribuye la facultad de llevar al parlamento una representación sin distorsiones de las corrientes de opinión en la sociedad, al contar todos los partidos con las mismas oportunidades de obtener representación parlamentaria». Aunque a priori se podría pensar que un sistema proporcional podría conllevar a un excesivo fraccionamiento, las democracias actuales dotan a sus sistemas electorales de mecanismos que limiten en mayor o menor medida dicho fraccionamiento y que incluso refuercen a los partidos más votados.

Técnicamente, las variables fundamentales de un sistema electoral son las circunscripciones, el tamaño del Parlamento, la barrera electoral y los métodos de asignación de escaños tanto a las circunscripciones como a los partidos políticos.

2.2. Circunscripción

Podría definirse como el conjunto de ciudadanos o de electores agrupados generalmente sobre una base territorial a partir de cuyos votos se procede a distribuir los escaños de un parlamento a los partidos o a las coaliciones.

Las circunscripciones pueden establecerse a partir de demarcaciones administrativas previamente existentes en el país. Otras veces la delimitación de una circunscripción obedece a motivos de índole geográfica. En el caso de distritos uninominales lo que más se busca es la proximidad de los habitantes que incluye cada circunscripción

Cuadro 1: Votos en Granada 2011. Repartos d'Hondt y Restos Mayores

Partido	Votos	Cuota	Votos/1	Votos/2	Votos/3	Votos/4	d'Hondt	Restos Mayores
PP	237.785	3,34	237.785	118.892	79.261	59.446	4	3
PSOE	185.867	2,61	185.867	92.933	61.956	46.467	3	3
IU	40.360	0,57	40.360	20.180	13.453	10.090	0	1
UPyD	26.255	0,37	26.255	13.127	8.751	6.564	0	0
PA	3.942	0,06	3.942	1.971	1.314	985	0	0
EQUO	3.852	0,05	3.852	1.926	1.284	963	0	0
Totales	498.061	7,00					7	7

Fuente: Elaboración propia a partir de los datos del Ministerio del Interior.

(distrito) y que el número de estos sea similar para todas ellas.

En el caso de España las provincias eran unas demarcaciones geográficas que habían tenido un papel muy relevante antes de la Constitución de 1978 y de la creación del Estado de las Autonomías. Por ello, fueron tomadas como circunscripciones electorales para la primera elección al Congreso de los Diputados en 1977; después la Constitución las estableció de nuevo como circunscripciones para futuras elecciones y, por tanto, actualmente las circunscripciones para el Congreso de los Diputados son las 50 provincias, junto con las ciudades de Ceuta y Melilla.

Las circunscripciones deben cubrir todo el territorio y, habitualmente, no deben solaparse. Sin embargo, en algunos casos hay excepciones y se opta por la creación de demarcaciones electorales específicas. Así, en algunos países las minorías étnicas constituyen una circunscripción electoral para la elección de algunos representantes de su parlamento, es decir, en algunos países el conjunto del estado actúa como una única circunscripción para las minorías. Es, por ejemplo, el caso de Polonia, donde a los partidos que representan a la minoría alemana se les aplica el conjunto del país como una única circunscripción, mientras que el reparto de escaños al resto de partidos se hace en otras circunscripciones que cubren todo el país.

La magnitud de una circunscripción se define como el número de escaños que le corresponden.

Los sistemas electorales con circunscripción única son muy poco frecuentes. Por tanto, lo más normal es dividir el territorio en una pluralidad de circunscripciones a las cuales se les asignan los escaños del parlamento, unas veces en proporción a su número de electores (como en Suecia), y otras veces en proporción a su número de habitantes.

2.3. Barrera electoral

Con objeto de evitar que un elevado número de partidos políticos tengan representación en el parlamento y, por tanto, el parlamento esté muy fragmentado, se suelen establecer barreras electorales al definir el sistema electoral. Una barrera electoral es una limitación para participar en el reparto de escaños. Las barreras son muy aconsejables cuando hay las circunscripciones electorales de gran tamaño; más aún si la asignación de los escaños a los partidos se hace en proporción a sus votos totales. Una barrera suele consistir en un porcentaje de votos. Por ejemplo, Suecia contem-



pla dos barreras electorales para la elección de su parlamento; exige a los partidos políticos superar el 4 por ciento de los votos totales para participar en el reparto de los escaños o, alternativamente, haber recibido al menos el 12 por ciento de los votos de la circunscripción correspondiente. El 12 por ciento equivale a menos de 90.000 votos. Así, un partido que supere el 12 por ciento de los votos en la circunscripción del Condado de Estocolmo, cuyo tamaño es de 38 escaños, tiene derecho a participar en el reparto de los escaños de esa circunscripción y recibirá al menos 4 escaños. Otro partido puede recibir muchos más votos, por ejemplo, 200.000, pero distribuidos en toda Suecia y, por tanto, no supera el 12 por ciento en ninguna circunscripción, ni el 4 por ciento a nivel global y no tiene derecho a participar en el reparto. Normalmente las barreras más usadas conducen a injusticias y falta de equidad de este tipo.

En el caso de España se estableció una barrera del 3 por ciento a nivel de los votos de cada circunscripción electoral para participar en el reparto de los escaños de la misma. El 3 por ciento de una circunscripción de tamaño 20 significa una cuota de 0,6 escaños y el partido que ha sacado esos votos no recibe ningún escaño porque con el método d'Hondt se necesita una cuota superior a 1 o muy cercana a 1 para recibir un escaño. Por tanto, la barrera establecida en el sistema electoral español prácticamente no surte ningún efecto salvo en Madrid o Barcelona y sólo ha ocurrido en una ocasión, concretamente en las elecciones de 1993 en Madrid.



Sin embargo, el 4 por ciento de Suecia tiene un gran efecto en muchas elecciones porque permite participar en el reparto de los 310 escaños permanentes de su parlamento, que están distribuidos en las circunscripciones y en los 39 restantes que son los escaños compensatorios, y que sirven para corregir los desajustes producidos en el reparto de los 310 primeros. Así, a un partido que obtenga el 4 por ciento de los votos, se le asigna el 4 por ciento de los 349 escaños totales del parlamento (14 escaños), mientras que un partido que obtenga el 3,9 de los votos no recibe ningún escaño, porque no tiene derecho a participar en el reparto de los escaños en las circunscripciones, ni a compensar con los 39 finales los que le pudieran faltar para alcanzar los 14 que también corresponden en proporción a sus votos totales.

2.4. Método de reparto de escaños

El método de reparto, conocido también con el nombre de fórmula electoral, permite aproximar las cuotas o proporciones exactas de escaños que corresponden a cada partido (o a cada circunscripción) por cantidades enteras.

Sea cual sea el método escogido en un reparto, unos partidos resultan beneficiados y otros perju-

dicados. Con el método d'Hondt los partidos más grandes suelen ser los beneficiados y los pequeños los perjudicados, tal y como ocurrió en el ejemplo mostrado en la Tabla 1. Hay métodos que son imparciales, con los cuales la probabilidad de resultar beneficiado un partido es la misma que la de resultar perjudicado. Es lo que ocurre con el método de Hamilton, ya que por ejemplo un partido grande tiene la misma probabilidad de que su resto sea grande o pequeño. El método de Sainte-Laguë también es imparcial.

Cuando un sistema electoral tiene una sola circunscripción electoral, o bien son muy pocas circunscripciones, el efecto de usar un método u otro es casi el mismo. Sin embargo, cuando hay muchas circunscripciones electorales y la representación de los partidos se obtiene como suma de los repartos obtenidos en ellas un partido puede tener un beneficio muy grande (porque el reparto le sea favorable en casi todas ellas) o un perjuicio muy grande (porque el reparto le sea desfavorable en casi todas ellas).

Es España al usar el método d'Hondt para distribuir los escaños del Congreso en las 52 circunscripciones electorales si un partido es el vencedor o el segundo más votado en muchas de ellas puede acumular una gran prima en el reparto. Por el contrario, el tercer partido no tiene opción a escaño en unas 40 circunscripciones, con lo cual, si es siempre el mismo, acumula un castigo enorme. Es lo que les ocurre de forma sistemática al tercer partido (y a los siguientes) de ámbito estatal. Concretamente IU, UPyD y EQUO fueron los grandes perjudicados en las elecciones de 2011.

2.5. Escaños compensatorios

El déficit de representatividad que surge cuando hay muchas circunscripciones, como acabamos de indicar en el apartado anterior, se puede resolver guardando parte de los escaños del parlamento para compensar los desequilibrios producidos. Este procedimiento no solo se hace en algunos países europeos más avanzados, sino también en algunos países iberoamericanos con democracias relativamente recientes que han sabido imitar a democracias más avanzadas. Los escaños compensatorios los pueden recibir los partidos en las mismas circunscripciones que recibieron los primeros o en una lista nacional. La técnica más reciente para garantizar una representación equánime tanto a los partidos como a las circunscripciones es la biproporcionalidad [2, 5, 7]. De todo ello haremos más hincapié tras describir formalmente los diferentes problemas de reparto propor-

cional.

3. Principales Métodos de Reparto Proporcional

Al hablar del problema de reparto proporcional nos referimos generalmente a los problemas que surgen en la asignación de escaños, ya sea a circunscripciones o a partidos políticos en proporción a sus habitantes o a sus votos, respectivamente. Es decir, problemas cuyas soluciones están constituidas por números enteros (y no negativos). No obstante, hay otros de idéntica índole y que requieren un tratamiento completamente similar cuyas soluciones son números con tres cifras decimales (u otra cantidad), como son las tablas de cambio de moneda que usa la banca.

Para simplificar nos referimos a un problema de reparto proporcional como el correspondiente a la asignación de escaños a los partidos en proporción a sus votos, ya que el tratamiento técnico de cualquier otro problema de reparto es idéntico.

3.1. Las dos familias de métodos de reparto proporcional

Usar un método de reparto proporcional, para distribuir h escaños en proporción a los votos de los partidos, requiere dos operaciones:

1. Aplicar un mismo factor a los votos de todos los partidos.
2. Redondear las cantidades obtenidas a números enteros (no negativos) que sumen h .

Unos métodos fijan el factor. Otros fijan las barreras para redondear a números enteros.

Los que fijan el factor asignan a cada partido tantos escaños como corresponde a las partes enteras de las fracciones obtenidas y los escaños que queden pendientes de distribuir se asignan a los partidos que tengan mayores restos, de forma que el total de escaños asignados sume h .

Los métodos de reparto que fijan las barreras de redondeo buscan un factor para que los redondeos sumen h . Son los métodos de divisores.

3.2. Métodos de cuotas y restos. Método de Hamilton

Los métodos que fijan el factor son métodos de cuotas y restos mayores. Siendo el de Hamilton o Renta Mayor el más importante de todos, pero no es el único. El factor que aplica el método de Hamilton a los votos es h/T , siendo h el número

de escaños a repartir y T el número total de votos de los partidos con derecho a participar en el reparto. Una vez que se aplica el factor se asignan a cada partido tantos escaños como vale la parte entera de su cuota (la cuota de un partido es el producto del factor por sus votos). Se completa la distribución de los escaños pendientes asignando un escaño más a los partidos que tenían mayor resto. A veces surgen empates, porque al buscar el último resto que debe redondear por exceso nos encontramos que hay dos o más que tienen igual derecho a hacerlo porque tienen el mismo valor.

Ejemplo 1. Distribuir usando Hamilton 8 escaños en proporción a los votos: (460, 260, 80). El factor es:

$$k = \frac{h}{T} = \frac{8}{460 + 260 + 80} = \frac{8}{800} = 0,01$$

y, por tanto las cuotas son: (460, 260, 80) * 0.01=(4,6, 2,6, 0,8), con lo cual el primer partido recibe 4 escaños el segundo 2; quedan otros dos escaños por distribuir y hay que asignar el primero de ellos al tercer partido que tiene resto 0,8 y el siguiente produce un empate porque los dos primeros partidos tienen igual derecho a recibirlo. Así este problema de reparto tiene dos soluciones (5, 2,1) y (4, 3,1).

La ley debe contemplar cómo resolver los empates que se produzcan en los repartos.

3.3. Métodos de divisores: Métodos de Sainte-Laguë y d'Hondt

La otra familia de métodos de reparto proporcional son los métodos de divisores. Cada uno de ellos fija cómo se redondean los resultados de aplicar el factor a los votos (que normalmente no resultan cantidades enteras). Para ello establecen una barrera en cada intervalo de números comprendidos entre dos enteros consecutivos. Por ejemplo, para los números del intervalo [0,1] establece la barrera en el valor 0,5, para el intervalo [1,2] establece la barrera en 1,5, la siguiente en 2,5 y, así, sucesivamente. Estas barreras corresponden al método de Sainte-Laguë. Significan, en el que una cantidad por debajo de 0,5 se redondea a 0, una cantidad entre 0,5 y 1,5 se redondea a 1 (si es exactamente 0,5 se puede redondear a 0 o a 1, etc.

Ejemplo 2. Distribuir los 8 escaños del ejemplo anterior usando Sainte-Laguë. Si aplicamos el mismo factor, el 0,01, los redondeos conducen a las asignaciones (5, 3, 1), ya que todas tienen parte decimal superior a 0,5, y deben redondearse por

exceso. Pero esas asignaciones no son válidas porque suman 9 escaños y sólo se pueden distribuir 8. Eso significa que el factor 0,01 no es válido para efectuar este reparto. Es necesario usar otro algo más pequeño. Si usamos el factor 0,0097 se obtiene $(460, 260, 80) * 0,0097 = (4,462, 2,522, 0,776)$ cuyos redondeos con Sainte-Lague son: (4, 3, 1) que suman 8. Por tanto, ese es el reparto.

A veces la cuota de un partido, para un problema de reparto, supera en muy poco el valor 0,5 y las restantes cuotas tiene restos menores que 0,5. En tal caso, el método de Sainte-Laguë asigna un escaño al partido con cuota cercana al 0,5 y dicho partido recibe el doble de escaños de lo que corresponden a su cuota. Eso se traduce en que le ha costado su escaño la mitad de lo que le cuesta a los partidos grandes. Para evitar situaciones de ese tipo los países escandinavos han cambiado el redondeo 0,5 por el 0,7 como barrera de redondeo en el intervalo [0,1]. Al método obtenido se le denomina Sainte-Laguë modificado y es el que se usa en dichos países.

El método d'Hondt usa como barreras las siguientes: el 1 para el intervalo [0,1], el 2 para el intervalo [1,2],... el $s+1$ para el intervalo $[s, s+1]$. Es decir, las barreras coinciden con el extremo superior de cada intervalo y, por tanto, los redondeos del método d'Hondt son al entero por defecto.

Ejemplo 3. Para los mismos datos del ejemplo 1 la distribución de los 8 escaños con el método d'Hondt requiere usar un factor mayor que 0,01 ya que los redondeos por defecto de las cuotas obtenidas en ejemplo 1 suman sólo 6 escaños. Sin embargo, si usamos el factor 0,012 se obtiene: $(460, 260, 80) * 0,012 = (5,52, 3,12, 0,96)$, con lo cual los redondeos por defecto son (5, 3, 0) que suman 8 y, por tanto, este es el reparto con el método d'Hondt. Vemos, en el último ejemplo, que el tercer partido que tenía una cuota de 0,8 escaños no ha llegado a recibir un escaño con el método d'Hondt. Ello hace que reciba muchas críticas y rechazos por los desequilibrios que ocasiona en la representación de los partidos medianos y pequeños. Sin embargo, el método d'Hondt tiene otras propiedades que lo hacen muy interesante. De hecho, d'Hondt ha sido y es un método usado en repartos proporcionales en muchos países, tales como: Argentina, Austria, Bélgica, Bulgaria, Colombia, Croacia, Ecuador, Eslovenia, España, Finlandia, Francia, Grecia, Guatemala, Irlanda, Israel, Japón, Países Bajos, Paraguay, Polonia, Portugal, República Checa, Suiza, Turquía, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

3.4. Los factores y la tabla de cocientes de los métodos de divisores.

Al realizar el reparto del ejemplo del cuadro 1, con el método d'Hondt, construimos unas columnas de cocientes obtenidos al dividir los votos de los partidos por los números naturales 1, 2, 3... y localizamos los cocientes más grandes para hacer el reparto, sin embargo, ahora acabamos de describir los métodos de divisores a partir de unas barreras para el redondeo y la búsqueda de un factor que permita que los redondeos sumen h . ¿Son dos procedimientos equivalentes?

Efectivamente es así. Podemos verlo de manera muy simple a partir del ejemplo 3. Tras multiplicar los votos por 0,012 obtuvimos las cantidades (5,52, 3,12, 0,96), cuyos redondeos por defecto, que son los que corresponden a d'Hondt, son (5, 3, 0). Ahora basta observar que al dividir la primera fracción, el 5,52, por los números 1, 2, 3, 4 o 5 los correspondientes cocientes son mayores que la unidad. Sin embargo, si dividimos por 6 o por otra cantidad mayor el cociente es menor que la unidad. Con la segunda fracción, el 3,12, ocurre algo parecido, al dividirla por 1, por 2 y por 3 se obtienen cocientes mayores que la unidad, pero al dividirla por 4 o más el cociente es menor que la unidad. Finalmente, el 0,96 aunque se divida por 1 el cociente es menor que la unidad. Así, si se hace una tabla de cocientes dividiendo las cantidades (5,52, 3,12, 0,96) por los números naturales, 5 de los 8 más grandes se obtienen con la primera fracción y tres con la segunda. Lógicamente si en lugar de obtener los cocientes a partir de las cantidades (5,52, 3,12, 0,96) lo hubiésemos hecho a partir de los votos (460, 260, 80), los 8 cocientes más grandes estarían situados de igual forma (cinco se habrían obtenido a partir de valor 460 y tres a partir del 260).

Si el método de reparto es el de Sainte-Laguë, la búsqueda del factor equivale a hacer la tabla de cocientes entre votos y las cantidades 0,5, 1,5, 2,5,...etc., y localizar los 8 cocientes más grandes de nuevo. Evidentemente los divisores 0,5, 1,5, 2,5,... etc., pueden substituirse por el doble de ellos, es decir, por 1, 3, 5,... etc. Por eso, el método de Sainte-Laguë también se denomina el de los divisores impares.

Análogamente el método de Sainte-Laguë mejorado usa los divisores 1,4 3, 5, 7,... etc.

4.1. Algunas propiedades importantes para elegir un método de reparto

4.1.1. Exactitud

Una de las primeras propiedades que se persigue al construir un método de reparto es la exactitud. Significa que si todas las cuotas de los partidos son cantidades enteras entonces el método debe dar solución única a ese problema y la solución debe coincidir con las cuotas (es decir cuando no hay problema de redondeos no demos lugar a una solución extraña).

4.1.2. Homogeneidad

La distribución de escaños debe ser la misma si los votos nos los dan por unidades, por decenas, por miles, por porcentajes, etc. Por ejemplo, asignar 8 escaños en proporción a los votos (460, 260, 80) debe dar la misma solución que asignar los 8 escaños en proporción a las cantidades (460λ, 260λ, 80λ), para cualquier valor de λ que sea mayor que cero.

4.1.3. Monotonía

Un método de reparto de escaños se dice que es monótono cuando al repartir más escaños ningún partido recibe menos.

Ejemplo 4. Consideremos que los votos en un municipio han sido (630, 430, 330, 50, 40, 20). Vamos a suponer que en este municipio hay que asignar 15 concejales con el método de Restos Mayores. Entonces, como las cuotas son:

$$(630, 430, 330, 50, 40, 20) * 15/1500 = (6,3, 4,3, 3,3, 0,5, 4,4, 0,2)$$

El reparto con Restos Mayores es (6, 4, 3, 1, 1, 0).

Sin embargo, si en lugar de 15 concejales fuesen 21 los que corresponden al municipio las cuotas serían:

$$(630, 430, 330, 50, 40, 20) * 21/1500 = (8,8, 6,0, 4,6, 0,7, 0,56, 0,3)$$

Y, por tanto, el reparto con Renta Mayor es (9, 6, 5, 1, 0, 0). Es decir el quinto partido tiene un concejal si son 15 en total, pero no recibe



ninguno si son 21. Esta paradoja se conoce con el nombre de paradoja de Alabama.

4.1.4. Consistencia

Un reparto siempre perjudica a unos partidos y beneficia a otros (ya que es poco probable que todas las cuotas sean números enteros). Así, algunos partidos (los perjudicados) empiezan a hacer cuentas comparando sus votos y escaños con los de otros partidos agraciados en el reparto. Por ejemplo, al distribuir 10 escaños usando Renta Mayor para un problema en el que las cuotas son (6,70, 2,65, 0,60, 0,05) el resultado es (7, 3, 0, 0). En este caso el partido claramente muy perjudicado es el tercero y los beneficiados los dos primeros. Así, uno de sus posibles comparaciones es con el primero. Puede argumentar que los 7 escaños recibidos entre ambos debían ser 6 para el primero y uno para él porque, efectivamente, repartiendo 7 escaños en proporción a los votos de ambos (que pudieron ser 670 y 60) se obtiene las cuotas (6,42, 0,58) con lo cual el reparto de los 7 escaños entre ambos partidos debe ser (6, 1). Este ejemplo muestra que una parte de reparto proporcional obtenido con Renta Mayor, la correspondiente a los partidos primero y tercero, esto es (7, 0) no es

Cuadro 2. Propiedades deseables y métodos

Propiedad	Restos Mayores	Sainte-Laguë	Sainte-Laguë Modificado	d'Hondt
Monotonía	No	Sí	Sí	Sí
Consistencia	No	Sí	Sí	Sí
Verificar Cuota	Sí	No	No	No
Cuota inferior	Sí	No	No	Sí
Fortalecer Coaliciones	No	No	No	Sí
Imparcialidad	Sí	Sí	No	No

Fuente: Elaboración Propia.

proporcional según ese método ya que debía haber sido (6, 1). Ello significa que el método Renta Mayor no es consistente.

4.1.5. Verificar la cuota

Parece natural exigir que ningún partido reciba más escaños de los que correspondan al redondeo por exceso de su cuota, ni menos del redondeo por defecto de su cuota. Eso significa verificar la cuota. Lógicamente el método de Rentas Mayores verifica la cuota. Sin embargo ningún método de divisores cumple esta propiedad y sólo d'Hondt verifica la cuota inferior, esto es le garantiza a cada partido, al menos, tantos escaños como vale el redondeo de su cuota por defecto.

4.1.6. Fortalecer coaliciones (castigar las divisiones en los partidos)

Nos planteamos ahora saber cómo se comporta un método frente a coaliciones (o a cismas) en los partidos. La hipótesis que se hace, en estos casos, es que cuando dos partidos se unen en coalición el número de votos de esa coalición va a ser igual a la suma de los votos que obtendrían los dos partidos por separado.

La pregunta que surge es si la coalición obtiene los mismos escaños o más que por separado. La respuesta es que con el método de Jefferson la coalición nunca obtiene menos escaños que por separado, sino que obtiene un número igual a la suma de los que obtendrían ambos partidos por separado o superior. Además esto es una propiedad característica de este método.

4.1.7. Imparcialidad

En muchas ocasiones se desea que el método de reparto no prime a los grandes partidos ni a los pequeños, es decir que, por ejemplo, la probabilidad de resultar beneficiado para un partido grande sea la misma que la de ser perjudicado. Y lo mismo para los restantes partidos. El tal caso se dice que el método es imparcial.

La lista de propiedades deseables podríamos alargarla, pero las citadas están entre las más importantes y son suficientes para comparar los métodos que hemos abordado. Lo hacemos en el cuadro 2, en la que no incluimos la exactitud ni la homogeneidad, ya que la verifican todos ellos.

Propiedades como la monotonía, la consistencia, el fortalecimiento de coaliciones y garantizar la cuota inferior hacen que d'Hondt sea uno de los

métodos más interesantes en la asignación de escaños a los partidos. Cuando la imparcialidad sea una propiedad esencial debemos elegir el método de Sainte-Laguë.

4. Métodos de reparto proporcional con requisitos mínimos/máximos

Un método de asignación de escaños a las circunscripciones electorales tiene que dar representación a todas ellas. Por tanto, puede plantearse como un problema de reparto proporcional con mínimos, donde todos los mínimos son iguales a 1 (salvo que se quiera otro mayor).

En otros casos, la asignación de los escaños a los partidos se hace en varias etapas y los resultados para cada partido en una etapa posterior no pueden ser inferiores a los obtenidos en la etapa previa. Eso obliga a extender la definición de nuestros métodos de reparto proporcional a estas situaciones.

Veamos la definición de un problema de reparto con requisitos mínimos y máximos. Sea un vector de votos de n partidos (o de poblaciones):

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

Supongamos que el total de escaños a distribuir es h y que $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ contiene el mínimo número de escaños que debe recibir cada partido (o cada circunscripción) y $M = (M_1, M_2, \dots, M_n)$ representa el número máximo de escaños que puede recibir cada uno. Este problema de reparto podemos representarlo de la forma $((V, m, M); h)$,

Para que el problema sea factible se requiere que las restricciones sean compatibles, es decir: (1)

$$\sum_{i=1}^n m_i \leq h \leq \sum_{i=1}^n M_i$$

Un ejemplo de problema con restricciones mínimas y máximas es la distribución de los 751 escaños del Parlamento Europeo entre los 27 Estados de la Unión Europea, ya que el Tratado de Lisboa establece que ningún país puede recibir menos de 6 escaños ni más de 96. Pero este problema tiene otras dificultades, ya que además de esas restricciones se indica qué reparto debe ser con proporcionalidad decreciente en lugar de proporcional.

Para el problema $((V, m, M); h)$ se obtienen las cuotas calculando el factor k que cumple la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=1}^n \text{mediana}(k * v_i, m_i, M_i) = h$$

Donde la mediana de tres números diferentes es el del medio, y si hay dos iguales coincide con esos dos números. Una vez que hemos calculado k , la cuota del partido i , es la mediana $(k * v_i, m_i, M_i)$. Ahora pueden aplicarse Rentas Mayores. El reparto con requisitos mínimos usando un método de divisores se plantea de forma análoga.

5. Repartos Biproporcionales

Los tamaños de las circunscripciones suelen ser en función de sus habitantes, normalmente primando en cierta medida a las más pequeñas (Balinski y Young, 1982 y Balinski y Demange, 1989).

La asignación de los escaños a los partidos debería obtenerse en función de sus votos totales, con cierta ventaja a los más votados, para garantizar la estabilidad de los mismos y evitar una gran fragmentación del parlamento (Márquez y Ramírez, 1998, y Ramírez y Márquez, 2010).

Cuando se establecen, por un lado, los tamaños de las circunscripciones y, por otro, la representación de los partidos queda por decidir cuál es la distribución de los escaños de los partidos en las circunscripciones en proporción a los votos obtenidos en las mismas.

Por ejemplo, se puede usar el método de Sainte-Laguë, que es imparcial. Sería inmediato distribuir los escaños de cada partido entre las circunscripciones en proporción a sus votos. Bastaría calcular para cada partido el factor adecuado y redondear cada fracción al entero más próximo. Pero en tal caso no se tiene garantía de que las circunscripciones reciban los escaños que indican sus tamaños. También sería inmediato distribuir los escaños de cada circunscripción en proporción a los votos de los partidos en esa circunscripción. Pero no hay garantía de que el total de escaños recibidos por cada partido sea correcto, como ocurre en España.

Para el reparto biproporcional debemos poner los votos de todos los partidos en todas las circunscripciones en una tabla rectangular y multiplicar simultáneamente las filas y las columnas de la tabla por factores adecuados, de tal manera que los redondeos con Sainte-Laguë (o con el método que se haya elegido) cumplan las restric-

Cuadro 3: Datos de la elección de 2011 al Congreso de los Diputados en España. Propuesta de modificación del sistema electoral

Partido	Votos	Cuotas	Escaños-350	Representatividad	Gobernabilidad
PP	10.866.566	180,99	186	186	201
PSOE	7.003.511	116,65	110	110	111
IU	1.685.991	28,08	11	25	26
UPD	1.143.225	19,04	5	16	18
CiU	1.015.691	16,92	16	16	16
Amaiur	334.498	5,57	7	7	7
PNV	324.317	5,40	5	5	5
ERC	256.985	4,28	3	3	4
EQUO	216.748	3,61	0	3	3
BNG	184.037	3,07	2	2	2
CC-NC-PNC	143.881	2,40	2	2	2
Compromis-Q	125.306	2,09	1	1	1
FAC	102.144	1,70	1	1	1
Eb	97.673	1,63	0	1	1
PA	76.999	1,28	0	1	1
PxC	59.949	1,00	0	0	0
Gbai	42.411	0,71	1	1	1
Otros	335.414	5,58	0	0	0
Total	24.015.346	400,00	350	380	400

Fuente: Elaboración propia.

ciones tanto para las circunscripciones como para los partidos (Pennisi, 2006). Este reparto requiere indispensablemente el uso de un ordenador y un software adecuado para tal reparto, como por ejemplo el BAZI (Pukelsheim, 2012).

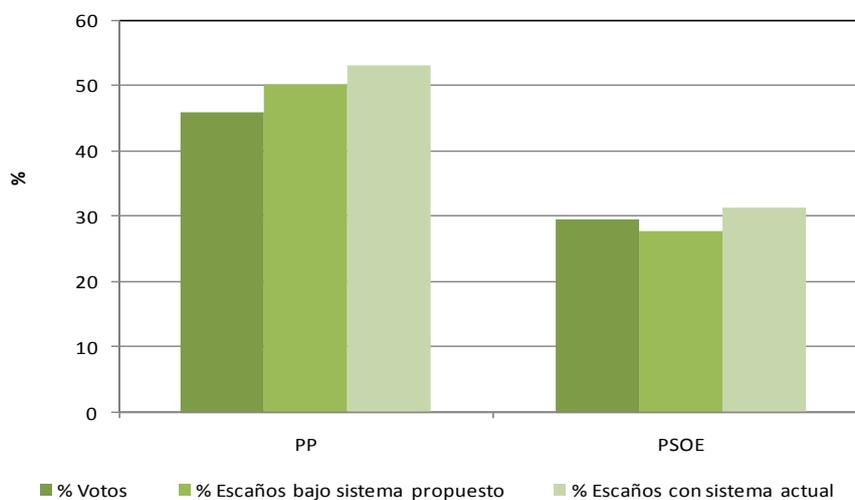
7. Aplicación. Una posible mejora del sistema electoral del Congreso de los Diputados en España

Los tres aspectos más importantes a corregir en el sistema electoral del Congreso de los Diputados son: disminuir el desequilibrio en la representación de los partidos, disminuir el desequilibrio en

tre la representación de los electores (los tamaños de las circunscripciones) y desbloquear las listas electorales. Son tres aspectos cuyo tratamiento es independiente. Nos vamos a limitar a describir brevemente cómo se puede resolver el primero, por ser el más importante y porque el segundo es inmediato (basta con disminuir la asignación de dos escaños iniciales a cada provincia a solo un escaño) y el tercero requiere una extensión importante para describirlo (Ramírez y Márquez, 2010).

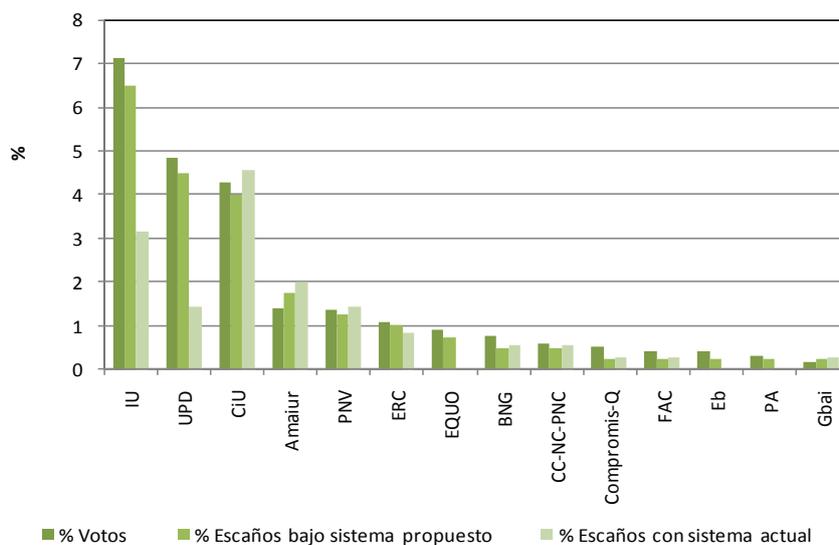
Así, para corregir los desequilibrios que produce el sistema electoral actual en la representación

Gráfico 1: Comparación de los porcentajes de votos y escaños con el sistema propuesto y con sistema actual para PP y PSOE



Fuente: Elaboración propia.

Gráfica 2: Comparación de los porcentajes de votos y escaños con el sistema propuesto y con sistema actual para resto de partidos



Fuente: Elaboración propia.

de los partidos, al distribuir los 350 escaños, podemos ampliar a 380 los escaños de forma que los 30 nuevos sirvan para corregir esas desproporciones. En el cuadro 3 se muestran los partidos y sus votos totales (ordenados de mayor a menor número de votos). La tercera columna contiene las cuotas, es decir, los escaños que corresponden al distribuir 350 en proporción a los votos totales. La columna 4ª contiene las asignaciones obtenidas con el sistema electoral actual. En ella podemos observar discordancias importantes, por ejemplo, IU y UPyD superan en votos a CiU, pero CiU tiene más escaños. También hay discordancias entre UPyD y Amaiur, o bien entre EQUO y todos los partidos que le siguen.

En la penúltima columna tenemos un reparto muy representativo para los partidos. Se ha aplicado d'Hondt para asignar 380 escaños en proporción a los votos totales de los partidos, pero sin que ninguno de ellos pierda escaños, con respecto a los obtenidos en la columna 4ª (por eso Amaiur

$$\text{Max}(186, \lfloor k * 10830693 \rfloor) + \text{Max}(110, \lfloor k * 6973880 \rfloor) + \dots + \text{Max}(1, \lfloor k * 42411 \rfloor) = 380 \quad 3$$

continúa con 7 escaños). Es decir, este reparto se ha obtenido calculando el factor k a partir de la ecuación (3):

donde el símbolo $\lfloor \cdot \rfloor$ significa el redondeo por defecto de la fracción que incluya.

Para obtener este reparto también se puede seguir el procedimiento de los cocientes. En tal caso, los votos del PP se dividen por los números 187, 188, 189, ..., los del PSOE se dividen por 111, 112, 113, ..., los de IU se dividen por 12, 13, 14, ... etc. Entre los cocientes obtenidos se seleccionan los 30 mayores para adjudicar los 30 nuevos escaños. Los resultados son los que aparecen en la columna 5ª. Se trata de un reparto altamente representativo. Si la modificación del sistema electoral quedase así, los partidos grandes se fragmentarían con facilidad porque pierden poco o nada al dividirse. La gran mayoría de los sistemas electorales contemplan ventajas para los grandes partidos, con lo cual no les interesa fragmentarse. Una forma de dar ventaja al vencedor es distribuir unos pocos escaños finales en proporción al cuadrado de sus votos, pero si alcanza la mayoría absoluta asignaremos los escaños, que aún resten, en proporción a los votos totales de nuevo. La última columna contiene el resultado de esa asignación. Al distri-

buir los 20 últimos escaños el PP recibió los 15 primeros y alcanzó los 201 escaños. A partir de ahí se continúa asignando en proporción a los votos totales y los últimos escaños asignados los reciben: PSOE, IU, UPyD y ERC.

En total el PP ha recibido una prima de 20 escaños, un 5 por ciento, que ha sido a costa de todos los demás partidos, exceptuado Amaiur. Ello se observa con claridad en las dos gráficas siguientes donde se muestran el porcentaje de votos, el de escaños con la propuesta que hemos desarrollado y el de escaños con el sistema actual.

Ahora aplicaríamos el programa BAZI para distribuir los escaños de los partidos entre las 52 circunscripciones de forma que el PP recibirá 201 escaños, el PSOE 111, IU 26, etc. Y por otra parte Madrid recibirá 36 escaños, Barcelona 31, etc.

Referencias Bibliográficas

BALINSKI, M.L. y YOUNG, H. P. (1982): Fair Representation: Meeting the Ideal of One Man One Vote. Yale University Press, New Haven, CT.

BALINSKI, M.L. y DEMANGE, G., (1989): «An axiomatic approach to proportionality between matrices», *Mathematics of Operations Research*, vol. 14, págs. 700-719.

GINER, S.; LAMO DE ESPINOSA, E. y TORRES, C. (1998): *Diccionario de Sociología*. Alianza Editorial S.A., Madrid.

MÁRQUEZ, M. L. y RAMÍREZ, V. (1998): «The Spanish Electoral System. Proportionality and Governability», *Annals of Operation Research*, vol. 88, págs. 45-59.

PENNISI, A. (2006): «The Italian Bug: A Flawed Procedure for Bi-Proportional Allocation». *Mathematics and Democracy. Recent Advances in Voting Systems and Collective Choice* (Simeone y Pukelsheim, ed.), Springer, págs. 151-166.

RAMÍREZ, V., y MÁRQUEZ, A. (2010): «Un Sistema Electoral ecuaníme para el Congreso de los Diputados», *Revista Española de Ciencia Política*, N.º. 24, págs.. 139-160.

PUKELSHEIM F. (2012): The BAZI Program for the Biproportional Allotment (www.uni-augsburg.de/bazi/pseudoCode.html).